FERGOLA

PROPRIETÀ

DELLE SOLUZIONI INTERE E POSITIVE

DELL'EQUAZIONE

VITTORIO EM.
Digitized by Google

FONDO PROVINCIA

NAZIONALE
BIBLIOTECA
B. Prov.
Miscellanea
D
45
270
VITTORIO EM. III
NAPOLI

BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio 7
Palchetto 13
Num.° d' ordine 12

Digitized by Google

mi-D-15-240

Digitized by Google

Digitized by Google

All'ch. Prof. C. Ulrich

SOPRA TALUNE PROPRIETÀ

DELLE SOLUZIONI INTERE E POSITIVE DELL'EQUAZIONE

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n$$

NOTA

PER

E. FERGOLA

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Digitized by Google

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli

Fascicolo 10.° — Ottobre 1863.

Stamperia del Fibreno 1863

Digitized by Google

BIBLIOTECA PROVINCIALE NAPOLI

In una Nota intitolata *Zur combinatorische Analysis* ed inserita nel volume XXII del Giornale di Crelle, Jacobi dimostrò una elegante proprietà dei numeri interi e positivi che soddisfano l'equazione

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + nx_n = n .$$

Questa proposizione di Jacobi, riportata da Cauchy nella Memoria *sur les arrangements etc.* che trovasi nel tomo terzo degli *Exercices d'Analyse*, fu reso alquanto più generale dal signor Sylvester in un articolo comunicato all'Accademia delle Scienze di Parigi ed inserito in uno dei fascicoli dei *Comptes Rendus* pel mese di Ottobre 1861.

Ora nella presente Nota, partendo da un teorema di Eulero relativo alla trasformazione delle serie, dimostro relativamente alle soluzioni intere e positive della suddetta equazione parecchi teoremi alcuni dei quali, dello stesso genere di quelli di Jacobi e Sylvester, mi pajono meritevoli di qualche attenzione. Da una delle formole contenute in questo articolo deduco inoltre una espressione generale dei numeri di Bernoulli differente dall'altra che trovasi nella Memoria *sullo sviluppo della funzione* $\frac{1}{ce^{c}-1}$ etc. che fa parte delle pubblicazioni della disciolta Accademia delle Scienze di Napoli.

Digitized by Google

1. — Se $F(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\text{etc.}$, e i termini della serie che figura al secondo membro di questa equazione si moltiplicano per quantità qualunque $a_0, a_1, a_2, \ldots$, si ha:

$$A_0a_0+A_1a_1x^1+A_2a_2x^2+\text{etc.}=a_0F(x)+\frac{\Delta a_0}{\Pi 1}xF'(x)+\frac{\Delta^2 a_0}{\Pi 2}x^2F''(x)+\text{etc.}$$

Or quando le differenze di un certo ordine delle quantità $a_0, a_1, a_2, \ldots$, sono costanti, il secondo membro della precedente equazione conterrà solamente un numero limitato di termini; così sostituendo alle $a_0, a_1, a_2, \ldots$ rispettivamente i numeri $0, 1^n, 2^n, \ldots$, (n intero positivo), si avrà:

$$(1)\quad A_1x+2^nA_2x^2+3^nA_3x^3+\text{etc.}=\frac{\Delta 0^n}{\Pi 1}xF'(x)+\frac{\Delta^2 0^n}{\Pi 2}x^2F''(x)+\ldots+\frac{\Delta^n 0^n}{\Pi n}x^nF^n(x),$$

dove in generale $\Delta^r 0^n$ indica ciò che diviene $\Delta^r x^n$ quando $x=0$ e $\Delta x=1$.

Da un'altra parte, poichè

$$F(e^x)=A_0+A_1e^x+A_2e^{2x}+\text{etc.},$$

e

$$\frac{d^n}{dx^n}F(e^x)=\Sigma\frac{\Pi n}{\Pi 1^{\alpha_1}\Pi 2^{\alpha_2}\ldots\Pi n^{\alpha_n}\Pi\alpha_1\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_n}e^{\alpha x}F^\alpha(e^x)$$

dove

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n,$$

e la somma si estende a tutte le soluzioni intere positive della equazione

$$\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\ldots+n\alpha_n=n;$$

dovrà essere:

$$\Sigma\frac{\Pi n}{\Pi 1^{\alpha_1}\Pi 2^{\alpha_2}\ldots\Pi n^{\alpha_n}\Pi\alpha_1\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_n}e^{\alpha x}F^\alpha(e^x)=A_1e^x+2^nA_2e^{2x}+3^nA_3e^{3x}+\text{etc.}$$

Mutando in questa equazione e^x in x, ed avendo riguardo all'equazione (1) si troverà:

$$\Sigma\frac{\Pi n}{\Pi 1^{\alpha_1}\Pi 2^{\alpha_2}\ldots\Pi n^{\alpha_n}\Pi\alpha_1\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_n}x^\alpha F^\alpha(x)=$$

$$=\frac{\Delta 0^n}{\Pi 1}xF'(x)+\frac{\Delta^2 0^n}{\Pi 2}x^2F''(x)+\ldots+\frac{\Delta^n 0^n}{\Pi n}x^nF^n(x).$$

Digitized by Google

Ora i valori di α nel primo membro sono i numeri consecutivi $1, 2, 3, \ldots n$; dunque paragonando i coefficienti dei termini simili si avrà:

$$(2) \qquad \Sigma \frac{\Pi n}{\Pi 1^{\alpha_1} \Pi 2^{\alpha_2} \ldots \Pi n^{\alpha_n} \Pi \alpha_1 \Pi \alpha_2 \ldots \Pi \alpha_n} = \frac{\Delta^\alpha o^n}{\Pi \alpha}$$

dove la somma indicata al primo membro dovrà estendersi a tutti i valori interi e positivi delle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ proprii a soddisfare le duo equazioni:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = n$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = \alpha$$

Supponendo nell'equazione (2) successivamente $\alpha = 1$, $\alpha = 2$, etc., ed addizionando i risultati, si ottiene l'altra equazione:

$$(3) \quad \Sigma \frac{\Pi n}{\Pi 1^{\alpha_1} \Pi 2^{\alpha_2} \ldots \Pi n^{\alpha_n} \Pi \alpha_1 \Pi \alpha_2 \ldots \Pi \alpha_n} = \frac{\Delta o^n}{\Pi 1} + \frac{\Delta^2 o^n}{\Pi 2} + \ldots, + \frac{\Delta^n o^n}{\Pi n},$$

nella quale la somma devesi estendere a tutte le soluzioni intere positive della sola equazione

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + n\alpha_n = n.$$

Per distinguere fra loro le due somme che formano i primi membri delle equazioni (2) e (3), indichiamo la prima con $\sum_{n,\alpha}$ e la seconda con Σ_n. Fra i valori di Σ_n corrispondenti ai valori $1, 2, 3 \ldots$ di n sussiste una relazione mediante la quale, partendo dal valore $\Sigma_1 = 1$, si potranno calcolare successivamente quelli di $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$. Questa relazione può facilmente stabilirsi nel modo seguente:

Operando col simbolo Δ^α sopra i duo membri dell'equazione $(x+1)^n = x^n + nx^{n-1} +$ etc., e ponendo nel risultato $x = 0$ si trova:

$$\Delta^\alpha 1^n = \Delta^\alpha o^n + n\Delta^\alpha o^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\Pi 2} \Delta^\alpha o^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(\alpha+1)}{\Pi(n-\alpha)} \Delta^\alpha o^\alpha;$$

ma dalla equazione

$$\Delta^\alpha x^n = (x+\alpha)^n - \alpha(x+\alpha-1)^n + \frac{\alpha(\alpha-1)}{\Pi 2}(x+\alpha-2)^n - \text{etc.}$$

Digitized by Google

si ricava $(x+1)\Delta^x 1^n = \Delta^{x+1} 0^{n+1}$; dunque sarà:

$$\Delta^x o^n + n\Delta^x o^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\Pi 2}\Delta^x o^{n-2} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(x+1)}{\Pi(n-x)}\Delta^x o^x = \frac{\Delta^{x+1} o^{n+1}}{x+1};$$

e dividendo i due membri per Πx risulterà

$$\sum_{n,x} + n\sum_{n-1,x} + \frac{n(n-1)}{\Pi 2}\sum_{n-2,x} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(x+1)}{\Pi(n-x)} = \sum_{n+1,x+1}.$$

Se in questa equazione si ponga successivamente $x=1, 2\ldots$, avendo riguardo alle relazioni

$$\Sigma_n = \sum_{n,1} + \sum_{n,2} + \ldots + \sum_{n,n} \quad , \quad \sum_{n+1,1} = 1 ,$$

si troverà addizionando

$$(4) \qquad \sum_{n+1} = (\Sigma + 1)^n ,$$

con la convenzione di mutare in indici i diversi esponenti di Σ nello sviluppo del secondo membro.

Così, per esempio, si trova:

$$\Sigma_2 = \Sigma_1 + 1 = 2 \ , \ \Sigma_3 = \Sigma_2 + 2\Sigma_1 + 1 = 5 \ , \ \Sigma_4 = \Sigma_3 + 3\Sigma_2 + 3\Sigma_1 + 1 = 15, \text{ etc.}$$

Osserviamo da ultimo relativamente alla quantità dinotata da Σ_n che, supponendo nell'equazione (1) $F(x) = e^x$; e ponendovi $x=1$, si trova:

$$e\Sigma_n = 1 + \frac{2^{n-1}}{\Pi 1} + \frac{3^{n-1}}{\Pi 2} + \frac{4^{n-1}}{\Pi 3} + \text{etc.}$$

2. — Indicando con y una quantità qualunque, si ricava dalla equazione (2):

$$\Sigma_n \frac{\Pi n \Pi(x-1) y^x}{\Pi 1^{\alpha_1} \Pi 2^{\alpha_2} \ldots \Pi n^{\alpha_n} \Pi x_1 \Pi x_2 \ldots \Pi x_n} = \frac{y\Delta o^n}{1} + \frac{y^2\Delta^2 o^n}{2} + \ldots + \frac{y^n\Delta^n o^n}{n}.$$

Or, poichè $1 + \Delta = e^{\frac{d}{dx}}$, si ha:

$$\left(\frac{y\Delta}{1} + \frac{y^2\Delta^2}{2} + \frac{y^3\Delta^3}{3} + \ldots\right).x^n = \left(-\log\left(1 + y - ye^{\frac{d}{dx}}\right)\right).x^n;$$

Digitized by Google

ma, per $x=0$, si ha in generale

$$\left(\varphi\frac{d}{dx}\right)\psi(x)=\left(\psi\frac{d}{dx}\right)\varphi(x)\,;$$

dunque sarà:

$$\frac{y\Delta o^n}{1}+\frac{y^2\Delta o^n}{2}+\ldots+\frac{y^n\Delta^n o^n}{n}=\left(\frac{d^n}{dx^n}\cdot\log\frac{1}{1+y-ye^x}\right)_0=$$

$$=\frac{d^n}{dx^n}\cdot\left(\frac{y}{1+y}e^x+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{1+y}\right)^2e^{2x}+\frac{1}{3}\left(\frac{y}{1+y}\right)^3e^{3x}+\text{etc.}\right)_0=$$

$$=\left(\frac{y}{1+y}\right)+2^{n-1}\left(\frac{y}{1+y}\right)^2+3^{n-1}\left(\frac{y}{1+y}\right)^3+\text{etc.}\ ,$$

e perciò:

$$\Sigma_\alpha\frac{\Pi n\,\Pi(\alpha-1)\,y^\alpha}{\Pi 1^{\alpha_1}\,\Pi 2^{\alpha_2}\ldots\Pi n^{\alpha_n}\,\Pi\alpha_1\,\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_n}=$$

(5)

$$=\left(\frac{y}{1+y}\right)+2^{n-1}\left(\frac{y}{1+y}\right)^2+3^{n-1}\left(\frac{y}{1+y}\right)^3+\text{etc.}$$

Nel caso di $y=-1$ l'espressione $\log\frac{1}{1+y-ye^x}$ si riduce a $-x$, e lo sviluppo precedente cade in difetto. Allora però si ha evidentemente, se $n>1$, $\frac{d^n}{dn^n}\log\frac{1}{1+y-ye^x}=0$, e perciò:

(6) $$\Sigma_\alpha\frac{(-)^\alpha\,\Pi(\alpha-1)}{\Pi 1^{\alpha_1}\,\Pi 2^{\alpha_2}\ldots\Pi n^{\alpha_n}\,\Pi\alpha_1\,\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_n}=0\quad(n>1)\,.$$

3. — Possiamo trovare una formola analoga alla (5) partendo dall' equazione:

$$\Sigma_\alpha\frac{\Pi n\,\Pi\alpha\,y^\alpha}{\Pi 1^{\alpha_1}\,\Pi 2^{\alpha_2}\ldots\Pi n^{\alpha_n}\,\Pi\alpha_1\,\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_n}=y\Delta o^n+y^2\Delta^2 o^n+\ldots+y^n\Delta^n o^n\,,$$

che si deduce immediatamente dalla relazione (2). In fatti, poichè:

$$(1+y\Delta+y^2\Delta^2+\text{etc.})\,.\,x^n=\left(\frac{1}{1-y\Delta}\right).x^n=\left(1+y-ye^{\frac{d}{dx}}\right)^{-1}.x^n\,,$$

Digitized by Google

sarà.

$$y\Delta o^n + y^2\Delta^2 o^n + \ldots + y^n\Delta^n o^n = \left(\frac{d^n}{dx^n}\cdot\frac{1}{1+y-ye^x}\right)_0 =$$

$$= \frac{1}{1+y}\left(\frac{y}{1+y} + 2^n\left(\frac{y}{1+y}\right)^2 + 3^n\left(\frac{y}{1+y}\right)^3 + \text{etc.}\right),$$

e quindi:

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\Sigma_n \frac{\Pi n \Pi x\, y^x}{\Pi 1^{x_1}\,\Pi 2^{x_2}\ldots\Pi n^{x_n}\,\Pi x_1\,\Pi x_2\ldots\Pi x_n} = \\ &= \frac{1}{1+y}\left(\frac{y}{1+y} + 2^n\left(\frac{y}{1+y}\right)^2 + 3^n\left(\frac{y}{1+y}\right)^3 + \ldots\right). \end{aligned}$$

Quando $y=-1$ questa equazione si trova in difetto perchè $\frac{1}{1+y-ye^x}$ non può allora svilupparsi secondo le potenze ascendenti di e^x. In questo caso però è evidente che $\left(\frac{d^n}{dx^n}\cdot\frac{1}{1+y-ye^x}\right)_0 = (-1)^n$, e quindi sarà:

$$(8)\qquad \Sigma_n \frac{(-1)^n \Pi x}{\Pi 1^{x_1}\,\Pi 2^{x_2}\ldots\Pi n^{x_n}\,\Pi x_1\,\Pi x_2\ldots\Pi x_n} = \frac{(-1)^n}{\Pi n}.$$

Mutando nell'equazione (5) n in $n+1$, e paragonando con (7) si trova:

$$(9)\qquad \begin{aligned} &(1+n)\sum_{n-1} \frac{y^x \Pi(x-1)}{\Pi 1^{x_1}\,\Pi 2^{x_2}\,\Pi(n+1)^{x_{n-1}}\,\Pi x_1\,\Pi x_2\ldots\Pi x_{n-1}} \\ &= (y+1)\Sigma_n \frac{y^x \Pi x}{\Pi 1^{x_1}\,\Pi 2^{x_2}\ldots\Pi n^{x_n}\,\Pi x_1\,\Pi x_2\ldots\Pi x_n}. \end{aligned}$$

4. — Per mezzo dell'equazione (2) si può trovare ancora una espressione dei numeri di Bernoulli, cioè dei coefficienti B_1, B_3, B_5, etc. nello sviluppo:

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + B_1\frac{x^2}{\Pi 2} - B_3\frac{x^4}{\Pi 4} + B_5\frac{x^6}{\Pi 6} - \text{etc.}$$

Poichè essendo

$$(-1)^n B_{2n-1} = \left(\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\cdot\frac{x}{e^x-1}\right)_0 = \left(\frac{\frac{d}{dx}}{\frac{d}{e^{dx}-1}}\cdot x^{2n}\right)_0 = \left(\frac{\log(1+\Delta)}{\Delta}\cdot x^{2n}\right)_0 =$$

$$= -\frac{\Delta o^{2n}}{2} + \frac{\Delta^2 o^{2n}}{3} - \frac{\Delta^3 o^{2n}}{4} + \ldots \pm \frac{\Delta^{2n} o^{2n}}{2n+1}.$$

Digitized by Google

e ricavandosi dall'equazione (2)

$$(-1)^{\alpha}\frac{\Delta^{\alpha}o^{2n}}{\alpha+1}=\sum_{2n,\alpha}\frac{(-1)^{\alpha}\Pi 2n\,\Pi\alpha}{\Pi 1^{\alpha_1}\,\Pi 2^{\alpha_2}\ldots\Pi 2n^{\alpha_{2n}}\Pi\alpha_1\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_{2n}}\frac{1}{\alpha+1},$$

si vede che dovrà essere:

$$(10)\qquad (-1)^{\alpha}\overset{\alpha}{B}_{2n-\alpha}=\sum_{2n}\frac{(-1)^{\alpha}\Pi 2n\,\Pi\alpha}{\Pi 1^{\alpha_1}\,\Pi 2^{\alpha_2}\ldots\Pi 2n^{\alpha_{2n}}\Pi\alpha_1\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_{2n}}\frac{1}{\alpha+1}$$

dove $\qquad \alpha=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n},$

e la somma si estende a tutte le soluzioni intere positive dell'equazione

$$\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+2n\alpha_{2n}=2n\,.$$

Mettendo in vece la funzione $\frac{x}{e^x-1}$ sotto la forma $\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2.3}+\ldots\right)^{-\alpha}$ si troverebbe:

$$(-1)^{\alpha}\overset{\alpha}{B}_{2n-\alpha}=\sum_{2n}\frac{(-1)^{\alpha}\Pi 2n\,\Pi\alpha}{\Pi 2^{\alpha_2}\,\Pi 3^{\alpha_3}\ldots\Pi(2n+1)^{\alpha_{2n}}\Pi\alpha_1\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_{2n}},$$

e quindi:

$$(11)\qquad \begin{aligned}&\sum_{2n}\frac{(-1)^{\alpha}\Pi\alpha}{\Pi 1^{\alpha_1}\,\Pi 2^{\alpha_2}\ldots\Pi 2n^{\alpha_{2n}}\Pi\alpha_1\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_{2n}}\frac{1}{\alpha+1}=\\&=\sum_{2n}\frac{(-1)^{\alpha}\Pi\alpha}{\Pi 2^{\alpha_2}\,\Pi 3^{\alpha_3}\ldots\Pi(2n+1)^{\alpha_{2n}}\Pi\alpha_1\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_{2n}}.\end{aligned}$$

Ancora, si deduce immediatamente da ciò che precede:

$$(12)\qquad \begin{aligned}&\sum_{2n-1}\frac{(-1)^{\alpha}\Pi\alpha}{\Pi 1^{\alpha_1}\,\Pi 2^{\alpha_2}\ldots\Pi(2n-1)^{\alpha_{2n-1}}\Pi\alpha_1\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_{2n-1}}\frac{1}{\alpha+1}=\\&=\sum_{2n-1}\frac{(-1)^{\alpha}\Pi\alpha}{\Pi 2^{\alpha_2}\,\Pi 3^{\alpha_3}\ldots\Pi 2n^{\alpha_{2n-1}}\Pi\alpha_1\Pi\alpha_2\ldots\Pi\alpha_{2n-1}}=0\,.\end{aligned}$$

080447

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA